PROBLEMS FOR SOLVING GEOMETRIC PROBABILITIES WITH CONTINUOUS INTEGRALS

Namazov Mirjalol Jo'raqul o'g'li,
O'zbekiston Milliy Universiteti Jizzax filiali o'qituvchisi, email: mirjalolnamazov@gmail.com
Sharipova Sadoqat Fazliddinovna,
O'zbekiston Milliy Universiteti Jizzax filiali o'qituvchisi, email: sadokatsaripova8@gmail.com

Abstract: This paper deals with the application of geometric probabilities to multiple integrals. In particular, the problem of the volume of a cylindrical beam is considered, and finding this volume involves the calculation of a double integral.

Keywords: Geometric probability, n-dimensional Euclidean space, Multiple integrals

GEOMETRIK EHTIMOLLIKLARNI KARRALI INTEGRALLAR YORDAMIDA YECHISHGA DOIR MASALALAR

Namazov Mirjalol Jo'raqul o'g'li,
O'zbekiston Milliy Universiteti Jizzax filiali o'qituvchisi, email: mirjalolnamazov@gmail.com
Sharipova Sadoqat Fazliddinovna,
O'zbekiston Milliy Universiteti Jizzax filiali o'qituvchisi, email: sadokatsaripova8@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada Geometrik ehtimolliklarni karrali integralllarga tadbig'iga doir masalalar ko'rilgan. Ixtiyoriy jismlar hajmlari nisbati haqida masalalar ko'rib o'tilgan.

Kalit so'zlari: Geometrik ehtimollik, n −o'lchovli Yevklid fazosi, Karrali integrallar.

Geometrik ehtimollar

Ehtimollik modellarining yana bir muhim sinfi geometrik ehtimollar deb ataluvchi sinfdir. Ω to'plam n −o'lchovli Yevklid fazosining chekli n −o'lchovli hajmga ega bo'lgan sohasi bo'lsin. Ω ning hajmini aniqlash mumkin bo'lgan har qanday qism to'plamiga hodisa deymiz. $\mathcal{A}$ orqali barcha hodisalar sinfini belgilaymiz. A hodisaning ehtimoli deb ushbu

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} \qquad (1)$$

nisbatni qabul qilamiz. Bu yerda $V(A)$ soni A to'plamning n-o'lchovli hajmi. (1) formula yordamida aniqlangan P to'plam funksiyasi ehtimol o'lchovining barcha aksiomalarini qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ehtimollar fazosi, bu yerda P-ehtimol o'lchovi (1) formula orqali aniqlangan, Ω sohaga tavakkaliga (tasodifiy ravishda) nuqta tashlash bilan bog'liq bo'lgan masalalar uchun model vazifasini o'taydi. Bu yerda Ω elementar hodisalar fazosi kontinuum quvvatga ega bo'lgani uchun klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz. Nuqtaning vaziyati Ω sohada tekis taqsimlangan, ya'ni nuqtani A sohaga tushishi bu sohaning n o'lchovli hajmiga proporsional deb faraz qilinadi.

Silindrik g‘o‘laning hajmi haqidagi masala bizni ikki karrali (aniq) integral tushunchasiga olib keladi.

Yuqoridan

$$Z = f(x, y) \qquad (2)$$

sirt bilan, yonlaridan yasovchisi Z o‘qiga parallel bo‘lgan silindrik sirt bilan, quyidan XY tekislikdagi tekis shakl (P) bilan chegaralangan jismning hajmi V ni topaylik.

Bu masalani hal qilish uchun integral hisobning asosiy usulidan foydalanamiz. Shu sababli (P) sohani egri chiziqlar to‘ri bilan $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$ bo‘lakchalarga ajratamiz va asoslari shu bo‘lakchalar bo‘lgan va hammasi birgalikda berilgan jismni hosil qiladigan silindrik ustunchalarni qaraymiz.

Bu ustunchalar hajmlarini hisoblash uchun har bir shakl (P_i) dan bittadan ixtiyoriy (ξ_i, η_i) nuqta olamiz. Agar har bir ustunchani balandligi $f(\xi_i, \eta_i)$ aplikataga taqriban teng bo‘lgan silindr deb olsak, u holda har ustunchaning hajmi taqriban

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot P_i$$

ga teng bo‘ladi, bu yerda (P_i) - asosdagi (P_i) shaklning yuzini bildiradi. U holda jismning to‘la hajmi uchun taqribiy ifoda

$$V = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot (P_i)$$

bo‘ladi. Bu tenglikning aniqligini oshirish uchun (P_i) yuzchalarning sonini oshira borib, ularning o‘lchovlarini kichiklashtira boramiz. (P_i) yuzchalar diametrlarining eng kattasi nolga intilganda, limitda, bu taqribiy tenglik aniq tenglikka aylanadi., ya‘ni

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot (P_i)$$

bo‘ladi va shu bilan quyidagi masala hal etildi.

Ana shu ko‘rinishdagi ifodaning limitini *f(x,y)* funksiyadan (P) soha bo‘yicha olingan ikki karrali integrali deyiladi va

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP$$

kabi belgilanadi. Natijada hajm uchun yuqoridagi formula

$$V = \iint_{P} f(x, y) dP$$

ko‘rinishga keladi.

Demak, ikki karrali integral bir o‘zgaruvchili funksiyaning aniq integrali ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun bevosita umumlashtirilishidan iborat.

Ikki karrali integralning ta’rifi

Yuqoridagi bo‘linishlar asosida

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot (P_i) \ (3)$$

yig‘indi $f(x, y)$ funksiyaning integral yig‘indisi yoki Riman yig‘indisi deyiladi.

(P_i) sohachalar diametrlarining eng kattasini λ bilan belgilaymiz. Integral yig‘indi σ ning $\lambda \to 0$ dagi chekli limiti

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

$f(x, y)$ funksiyaning (P) soha bo'yicha ikki karrali integrali deyiladi va

$$I = \iint_P f(x, y)dP$$

kabi belgilanadi. Bu integralga Riman integrali deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x, y)$ funksiya (P) sohada chegaralanmagan bo'lsa, u shu sohada integrallanmaydi.

1-Masala. Quyidagi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ tenglamani qanoatlantiruvchi ellipsoid ichiga tavakkaliga nuqta tashlangan. Tashlangan nuqta ellipsoidga ichki chizilgan Radiusi a ga teng bo'lgan sharga ichiga tushish ehtimolini toping.

Yechilishi Dastavval (1) formulaga asosan $P(A)$ ehtimollikni topish uchun A hodisani va unga qulaylik beradigan hodisalarga aniqlik kiritamiz.

A hodisa tashlangan nuqta shar ichiga tushishi hodisasi bo'lsin.

$V(\Omega)$ Ellipsoid hajmi , $V(\mathrm{A})$ shar hajmi.

Agar $\{z \geq 0\}$ yarim fazodagi ellipsoid bo`lagining hajmini V_1 desak, unda

$$V = 2V_1 = 2c \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy$$

bo'ladi. Bu yerda

$$D = \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

$\begin{cases} x = ar\, cos\varphi \\ y = br\, sin\varphi \end{cases}$ almashtirish bajaramiz, unda D soha

$\Delta = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1 , 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ to'g'ri to'rtburchakka akslanadi va yakobian

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\, cos\varphi & -ar\, sin\varphi \\ b\, sin\varphi & br\, cos\varphi \end{vmatrix} = abr$$

bo'ladi. Unda

$$V = 2c \iint_\Delta \sqrt{1 - r^2} \cdot abr\ drd\varphi = 2abc \int_0^1 \left[r\sqrt{1 - r^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \right] dr =$$

$$= 4\pi abc \int_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\, dr = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Demak Ellipsoid hajmi $V(\Omega) = \frac{4\pi}{3} abc.$

Endi shar hajmini topamiz. Ma'lumki radiusi R ga teng bo'lgan shar hajmi

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ga teng. Bizni misolda radusi $R = a$ ekanligidan

$$V(A) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

Masalani yechimini topishga kirishamiz.

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{4\pi}{3}a^3}{\frac{4\pi}{3}abc} = \frac{a^2}{bc}.$$

2-Masala. Kubga shar ichki chizilgan. Kub ichiga tavakkaliga tashlangan nuqta shar ichiga tushish ehtimoli toping.

$$\textit{Yechilishi} \quad P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$$

$$V(A) = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad V(\Omega) = a^3$$

Kubga ichki chizilgan shar va kub qirrasi orasidagi bog‘lanishga ko‘ra: $a = \sqrt{2}R$ ekanligidan

$$V(\Omega) = a^3 = \left(\sqrt{2}R\right)^3 = 2\sqrt{2}R^3$$. Demak

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\sqrt{2}R^3} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Xulosa

Ikki karrali integral matematik analizning asosiy masalalaridan biri bo’lib, faqatgina geometriya, fizika masalalarini hal etishda emas, balki texnika fanlarining ko’pgina sohalaridagi masalalarni hal qilishda ishlatiladi. Ikki karrali integralning barcha xossalari, hisoblash qoidalarini o’rgangan holda, o’zgaruvchilarni almashtirish usullarini qo’llab, geometriya, fizikaga oid masalalarni yechish mumkin. Shu jumladan, ikki karrali integrallar yordamida geometrik ehtimollikni yechish masalasi qarab chiqildi.

Adabiyotlar:

1. S.X. Cirojiddinov, M.M.Mamatov «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” T.”O’Qituvchi» 1980y.
2. Б.В.Гнеденкою «Курс теории вероятностей», М.Наука, 1980
3. V.E.Gmurman «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misollar”.
4. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. II qism, T. “O’qituvchi”, 1974 (166-206 b.)